CALL US 01227551012
035911009

Need. Know. Accomplish.

FARHA

The Smart Choice

JOIN FARHA

مكتبة فرحة

4

الترم الثانى (قبل الميد ترم)

WE GUARANTEE YOUR SUCCESS. FARHA

- اعدادي
- مدني
- كهرباء
- إنتاج
- بحرية
- SSP
- ميكانيكا
- غزل ونسيج

الحركة فى المستوى
الأحداثيات الكارتيزية

تنبيه هام ! نحن غير مسئولين عن اى منكرات تباع باسم و شعار المكتبة فى اى مكان اخر

Your Success is Our Business

ليس للمكتبة فروع أخرى

ديناميكا

ش

THINK FARHA READY|START|GROW

أعدادى هندسة

1,75

(٢)

الحركة في المستوى

(١) الاحداثيات الكارتيزية.

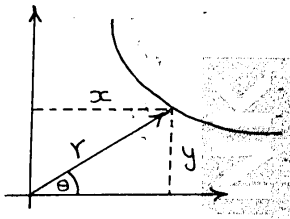
الباب الثاني

حركة جسيم في مستوى

أولاً: الاحداثيات الكارتيزية

* الموضع :

نعين موضع الجسيم عند أي لحظة (t) بالاحداثيات (x,y) للنقطة التي يحتلها الجسيم في هذه اللحظة



* لتعيين بعد الجسيم عن نقطة الاصل :

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ مقداراً

$\tan\theta = \frac{y}{x}$ اتجاهاً

* المعادلات البارامترية *

هي معادلات بين الموقع والزمن

$x = \phi(t)$ & $y = \phi(t)$

* المعادلات الكارتيزية *

يمكن استنتاجها من المعادلات البارامترية للمسار وذلك بحذف t من المعادلات البارامترية فتنتج علاقة بين (x,y)

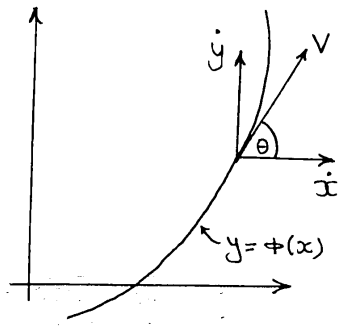
$y = \phi(x)$

* عندما يبدأ جسيم الحركة من نقطة الاصل فهذا يعني :

$x_0 = 0$ & $y_0 = 0$

FARHA READY? START GROW

(2)



* السرعة :

"هي معدل تغير الموضع بالنسبة للزمن"
والسرعة عبارة عن مركبتين متعامدتين

1) مركبة رأسية : $V_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt}$

2) مركبة أفقية : $V_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$

وبالتالي تكون السرعة الكلية $V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

واتجاهها $\tan\theta = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

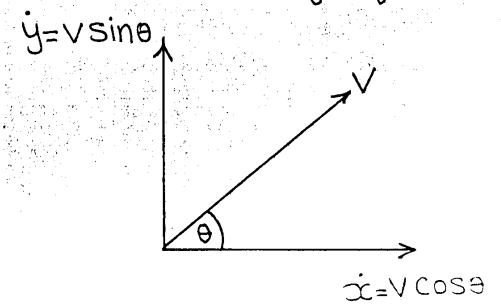
ملاحظات هامة

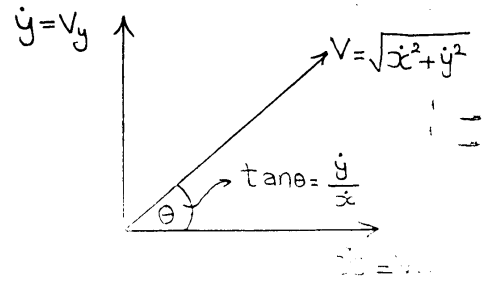
* السرعة المحصلة V تكون عند أي موضع مماسة لمنحنى المسار عند ذلك الموضع

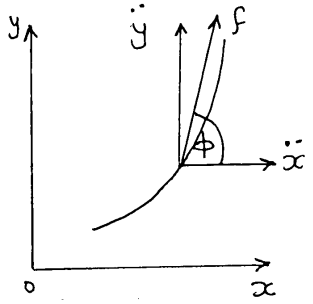
ميل المماس $= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \tan\theta =$ ميل السرعة

* اذا بدأ الجسيم الحركة من سكون $\dot{y}_0 = 0$ & $\dot{x}_0 = 0$

* إذا بدأ الجسيم الحركة بسرعة V_0 في اتجاه θ مع المحور الافقي
$\dot{x}_0 = V_0 \cos\theta$ & $\dot{y}_0 = V_0 \sin\theta$







العجلة f :

"هي معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن"
والعجلة عبارة عن مركبتين متعامدتين

١) مركبة رأسية : $\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = \dot{y}\,\frac{d\dot{y}}{dy}$

٢) مركبة أفقية : $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \dot{x}\,\frac{d\dot{x}}{dx}$

وبالتالي تكون العجلة الكلية $f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}$

واتجاهها $\tan\phi = \frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}$

ملحوظة هامة

العجلة الكلية لا تمس منحنى الحركة (أي أنها ليست على نفس خط السرعة) إلا في حالة الحركة في خط مستقيم.

أنواع المسائل

- تعطى المعادلات البارامترية (x,t) & (y,t) والمطلوب سرعة & عجلة بالتفاضل نحصل على $(\dot{x},t)$ & $(\dot{y},t)$ ثم التفاضل ثانية $(\ddot{x},t)$ & $(\ddot{y},t)$
- تعطى مركبات العجلة + احوال البداية $(\ddot{x},t)$ & $(\ddot{y},t)$ والمطلوب موضع بالتكامل لكلتا مركبتي العجلة $(\dot{x},t)$ & $(\dot{y},t)$ وبالتكامل ثانية (x,t) & (y,t)
- تعطى المعادلة الكارتيزية واحدى مركبتي العجلة التي سوف نكاملها مرتين للحصول على موضع المركبة في الزمن والتعويض في المعادلة الكارتيزية للحصول على المعادلة البارامترية الأخرى

(4)

مسألة فرق (1)

المعادلتان البارمتريتان للحركة المستوية لجسيم

$x = 2t^2 + 3t$ & $y = \frac{t^3}{3} - 8$

أوجد مقدار السرعة (V) والعجلة (f) مقداراً واتجاهاً عند ما (t = 3 sec) علماً بأن x, y بالمتر

المركبات الأفقية

$x = 2t^2 + 3t$

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 4t + 3$

$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 4$

المركبات الرأسية

$y = \frac{t^3}{3} - 8$

$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = t^2$

$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = 2t$

$\dot{x}|_{t=3} = 4*3+3 = 15$

$\dot{y}|_{t=3} = 3^2 = 9$

$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$

$= \sqrt{9^2 + 15^2} = \boxed{17.49 \text{ m/s}}$

$\theta = \tan^{-1}\frac{9}{15} = \boxed{30.96^\circ}$

$\ddot{x}|_{t=3} = 4$

$\ddot{y}|_{t=3} = 2*3 = 6$

$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = \boxed{7.21 \text{ m/s}^2}$

$\phi = \tan^{-1}\frac{6}{4} = \boxed{56.31^\circ}$

5

مسألة رقم (٢)

يتحرك جسيم حركة مستوية معطاه بالعلاقات:

$\dot{x} = 50 - 16t$ & $y = 100 - 4t^2$

اذا علمت أن أحوال البداية هي ($x=0$ و $t=0$)

عين سرعته و عجلته عندما $y=0$

المركبات الرأسية	المركبات الافقية
$y = 100 - 4t^2$	$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 50 - 16t$
$\dot{y} = -8t$	$\int_0^x dx = \int_0^t 50 - 16t \, dt$
$\ddot{y} = -8$	$x = 50t - 8t^2$
	$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -16$

* عندما $y=0$ *

$100 - 4t^2 = 0$

$4t^2 = 100$

$\boxed{t=5}$

$t = -5$ ✗ مرفوضة

$\dot{x}|_{t=5} = 50 - 16 * 5 = -30$

$\dot{y}|_{t=5} = -40$

$V = \sqrt{(30)^2 + (40)^2} = \boxed{50 \text{ m/s}}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-40}{-30}\right) = \boxed{233.13^\circ}$ ⇐ why??

$\ddot{y}|_{t=5} = -8$

$\ddot{x}|_{t=5} = -16$

$f = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2}$

مسألة رقم (٢)

بالعلاقة : مركبة الموضع الأفقية لمنطاد جوي معطاه

$$x = 9t$$

فإذا علمت أن معادلة المسار للمنطاد هي :

$$y = \frac{x^2}{30}$$

عين :

أ) الانتقال الذي وقع للمنطاد من $t=0 \rightarrow t=2$

ب) السرعة مقداراً واتجاهاً عند هذه اللحظة .

جـ) العجلة مقداراً واتجاهاً عند نفس اللحظة .

$\because x = 9t$

$$y = \frac{x^2}{30} = \frac{81t^2}{30}$$

$$y = 2.7\,t^2 \qquad \& \qquad x = 9t$$

$$\dot{y} = 5.4\,t \qquad \dot{x} = 9$$

$$\ddot{y} = 5.4 \qquad \ddot{x} = 0$$

١) الانتقال من $t=0 \leftarrow t=2$

$$S = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2}$$

$$= \sqrt{(18)^2 + (10.8)^2} = 20.99 \text{ m}$$

٢) السرعة عند $t=2$

$$\dot{x}|_{t=2} = 9$$

$$\dot{y}|_{t=2} = 10.8$$

$$V = \sqrt{9^2 + 10.8^2} = 14.06 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{10.8}{9}$$

7

٣) العجلة عند $t=2$:

$$\ddot{x}|_{t=2} = 0$$

$$\ddot{y}|_{t=2} = 5.4$$

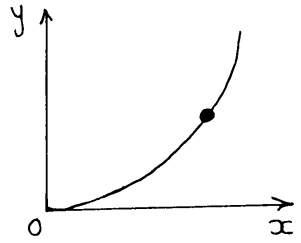
$$f = \sqrt{(0)^2 + (5.4)^2} = 5.4 \ m/s^2$$

$$\phi = \tan^{-1} \infty = 90^\circ$$

#

(8)

مسألة رقم (٤)



المعادلات البارامترية لمسار التحليق لطائرة نفاثة تقلع من مطار عند نقطة (O) هي :

$$x = 1.25t \quad \& \quad y = 0.03t^3$$

حيث t هو الزمن بالثانية و الاحداثيات x و y بالأمتار.
فإذا كان موقع المطار يرتفع عن سطح البحر 1500m عين بعد 40 ثانية من التحليق :

(أ) البعد الافقي للطائرة من المطار.
(ب) ارتفاع الطائرة عن سطح البحر.
(جـ) سرعة وعجلة الطائرة مقداراً واتجاهاً.

---

* البعد الافقي بعد مرور 40 ثانية $= x|_{t=40} = 1.25 * 40$

$= \boxed{50m}$

* البعد الرأسي عن سطح البحر = البعد الرأسي عن المطار + ارتفاع المطار عن البحر

$= y|_{t=40} + 1500$

$= 1920 + 1500$

$= \boxed{3420}m$

$\dot{x} = 1.25$ $\qquad$ $\dot{y} = 0.09t^2$

$\dot{x}|_{t=40} = 1.25$ $\qquad$ $\dot{y}|_{t=40} = 144$

$V = \sqrt{1.25^2 + 144^2} = 144 m/s$ $\qquad$ $\theta = \tan^{-1}\frac{144}{1.25} = 89.5^\circ$

$\ddot{x} = 0$ $\qquad$ $\ddot{y} = 0.18t$

$\ddot{x}|_{t=40} = 0$ $\qquad$ $\ddot{y}|_{t=40} = 7.2$

$f = 7.2 m/s^2$

(9)

مسألة رقم (٥)

تتحدد مركبات سرعة جسيم يتحرك في مستوى بالعلاقتين

$$\dot{x} = -b\sqrt{a^2-x^2} \quad \& \quad \dot{y} = a$$

حيث a,b ثابتين . إذا علمت أن الجسيم بدأ الحركة من النقطة $(a,0)$ عين :

أ) المعادلة الكارتيزية للمسار

ب) عجلة الجسيم

$$\dot{y} = a$$

$$\frac{dy}{dt} = a$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t a\,dt$$

$$\boxed{y = at}$$

$$t = \frac{y}{a}$$

$$\dot{x} = -b\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int_a^x \frac{-dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = b\int_0^t dt$$

$$\left[\cos^{-1}\frac{x}{a}\right]_a^x = bt$$

$$\cos^{-1}\frac{x}{a} - \underbrace{\cos^{-1}1}_{0} = bt$$

$$\boxed{x = a\cos bt}$$

$$x = a\cos\left(\frac{by}{a}\right)$$

∴ المعادلة الكارتيزية :

$$\dot{y} = a$$

$$\ddot{y} = 0$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = -ab\sin bt$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = -ab^2\cos bt$$

$$f = ab^2\cos bt$$

$$\phi = 180$$

(10)

مسألة رقم (٦)

يتحرك جسيم على قطع مكافئ ($y=0.5x^2$) بسرعة افقية ($\dot{x}=5t$) عين :

(أ) بعد الجسيم (r) عن نقطة الاصل عندما ($t=1sec$)

(ب) مقدار العجلة عندما ($t=1$) إذا كانت احوال البداية هي $x_0=y_0=0$

$$\dot{x}=\frac{dx}{dt}=5t$$

$$\int_0^x dx=\int_0^t 5t\,dt$$

$$x=\frac{5}{2}t^2 \qquad y=0.5*\left(\frac{5}{2}t^2\right)^2$$

$$x=2.5t^2 \qquad y=3.125t^4$$

$$\dot{x}=5t \qquad \dot{y}=12.5t^3$$

$$\ddot{x}=5 \qquad \ddot{y}=37.5t^2$$

* بعد الجسيم (r)

$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2.5^2+3.125^2}=\boxed{4m}$$

$$V=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=\sqrt{(5)^2+(12.5)^2}=\boxed{13.46\ m/s}$$

$$f=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\sqrt{(5)^2+(37.5)^2}=\boxed{37.83\ m/s^2}$$

$$\phi=\tan^{-1}\frac{\ddot{y}}{\ddot{x}}=\tan^{-1}\frac{37.5}{5}$$

$$\boxed{\phi=82.4}$$

#

(11)

مسألة رقم (٧)

يستخدم رياضي محرك نفاث لتغيير عجلة حركته في مستوى على النحو التالي :

$$\ddot{y} = 6(t+1) \qquad \ddot{x} = 12\, y^{\frac{1}{3}}$$

حيث x و y هي الاحداثيات بالأمتار والزمن t بالثانية .
إذا بدأ الجسيم حركته من النقطة (2,1) بسرعة مركبتها :
($\dot{x}_0 = 6\,m/s$ & $\dot{y}_0 = 3\,m/s$) فأوجد موقع الرياضي وسرعته عند $t=1$.

$$\ddot{y} = \frac{d\dot{y}}{dt} = 6t+6$$

$$\int_3^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t 6t+6\, dt$$

$$\dot{y} - 3 = 3t^2 + 6t$$

$$\boxed{\dot{y} = 3t^2 + 6t + 3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 6t + 3$$

$$\int_1^y dy = \int_0^t 3t^2 + 6t + 3\, dt$$

$$y - 1 = t^3 + 3t^2 + 3t$$

$$y = t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$\boxed{y = (t+1)^3}$$

$$\ddot{x} = 12 * \left[(t+1)^3\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$\boxed{\ddot{x} = 12(t+1)}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 12(t+1)$$

$$\int_6^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^t 12(t+1)\, dt$$

$$\dot{x} - 6 = 6t^2 + 12t$$

$$\boxed{\dot{x} = 6t^2 + 12t + 6}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6t^2 + 12t + 6$$

$$\int_2^x dx = \int_0^t 6t^2 + 12t + 6\, dt$$

$$x - 2 = 2t^3 + 6t^2 + 6t$$

$$\boxed{x = 2[t+1]^3}$$

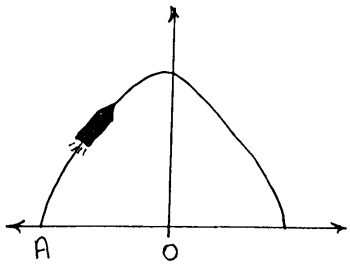
$x|_{t=1} = 16 \qquad y|_{t=1} = 8$

$\therefore$ موقع الرياضي (16,8)

$\dot{x}|_{t=1} = 24 \qquad \dot{y}|_{t=1} = 12$

$$V = \sqrt{24^2 + 12^2} = 26.83\, m/s$$

(12)



مسألة رقم (٨)

لفترة قصيرة من الزمن يتحرك صاروخ عبر مسار على شكل قطع مكافئ معادلته :

$$y=(18-2x^2)$$

فإذا كانت الحركة الارضية (الافقية) للصاروخ تتم وفقاً للعلاقة $x=4t-3$ Km

حيث t هو الزمن بالثانية.

عين مقدار واتجاه سرعة وعجلة الصاروخ عندما يكون بعده الافقي من موقع الاطلاق يساوي 4 Km.

$x=4t-3$ $\qquad$ $y=18-2*(4t-3)^2$

$\dot{x}=4$ $\qquad$ $\dot{y}=-2*2*(4t-3)*4$

$\ddot{x}=0$ $\qquad$ $\ddot{y}=-64$

أولاً نعين موقع الاطلاق x_0 & y_0

$x_0=-3$ $\qquad$ $y_0=0$

عندما يكون على بعد 4 من موقع الاطلاق

$$[x-(-3)]=4$$

أي عند $\boxed{x=1}$

$$1=4t-3 \Rightarrow \boxed{t=1}$$

$$V=\sqrt{(4)^2+(-16)^2}=16.49 \text{ Km/s}$$

$$\theta=\tan^{-1}\frac{-16}{4}=-75.96^\circ$$

$$f=\sqrt{(0)^2+(-64)^2}=64 \text{ Km/s}^2$$

$$\phi=\tan^{-1}-\infty=270^\circ \text{ أو } -90^\circ$$

(13)

مسألة رقم ٢ :

المعادلة الكارتيزية لمسار حركة جسيم في مستوى هي :

$$x = 16 \sin \frac{y}{12}$$

حيث كلا من y و x بالمتر . اذا كان أحوال البداية هي :

$x_0 = y_0 = 0$ و $V_0 = 20$ و $\alpha = \tan^{-1} \frac{3}{4}$

وكانت مركبة العجلة الافقية هي : $\ddot{x} = -x$

أ- عين موضع و سرعة و عجلة الجسيم بعد زمن يساوي π من بدء الحركة

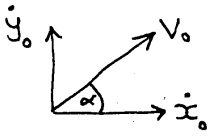
ب- ارسم شكل مسار الجسيم .

$$\ddot{x} = -x$$

$$\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -x$$

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} \dot{x} \, d\dot{x} = -\int_0^x x \, dx$$

لتعيين احوال بداية السرعة نقوم بتحليل السرعة الابتدائية الكلية



$$\dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha = 20 * \frac{4}{5} = 16$$

$$\dot{y}_0 = V_0 \sin\alpha = 20 * \frac{3}{5} = 12$$

$$\int_{16}^{\dot{x}} \dot{x} \, d\dot{x} = -\int_0^x x \, dx$$

$$\dot{x}^2 = 16^2 - x^2$$

$$\boxed{\dot{x} = \pm\sqrt{16^2 - x^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{16^2 - x^2}$$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{16^2 - x^2}} = \pm \int_0^t dt$$

$$\sin^{-1} \frac{x}{16} = \pm t$$

$$\frac{x}{16} = \pm \sin t$$

$$\boxed{x = \pm 16 \sin t}$$

(14)

بالتعويض في المعادلة الكارتيزية

$$x = 16 \sin \frac{y}{12}$$

$$16 \sin t = 16 \sin \frac{y}{12}$$

$$\boxed{y = 12t}$$

$$\boxed{x = 16 \sin t} \qquad \boxed{y = 12t}$$

$$x|_{t=\pi} = 0 \qquad y|_{t=\pi} = 12\pi$$

$$\boxed{\dot{x} = 16 \cos t} \qquad \boxed{\dot{y} = 12}$$

$$\dot{x}|_{t=\pi} = -16 \qquad \dot{y}|_{t=\pi} = 12$$

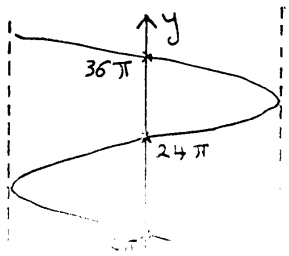
$$V = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ m/s}$$

$$\psi = \tan^{-1} \frac{12}{-16} = -36.87 + 180 = 143.13^\circ$$

$$\boxed{\ddot{x} = -16 \sin t} \qquad \boxed{\ddot{y} = 0}$$

$$\ddot{x}|_{t=\pi} = 0 \qquad \ddot{y}|_{t=\pi} = 0$$

$$f = 0$$



#

مثال

اذا كانت الحركة المستوية لجسم معطاه بالمعادلتين البارامتريتين :

$x = 10 \sin 2t$ $\qquad$ $y = 4t$

* عين مركبتي السرعة عندما $t = \frac{\pi}{6}$.
* وعين كذلك مركبتي العجلة عند نفس اللحظة.

$x = 10 \sin 2t$	$y = 4t$
$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 10 * 2 \cos 2t$	$\dot{y} = \frac{dy}{dt} = 4$
$\ddot{x} = -20 * 2 \sin 2t$	$\ddot{y} = 0$
$\dot{x}\big\|_{t=\frac{\pi}{6}} = 20 \cos(2 * \frac{\pi}{6})$ $= \boxed{10 \quad m/s}$	$\dot{y}\big\|_{t=\frac{\pi}{6}} = \boxed{4 \quad m/s}$
$\ddot{x}\big\|_{t=\frac{\pi}{6}} = -40 \sin(2 * \frac{\pi}{6})$ $= \boxed{-20\sqrt{3} \quad m/s^2}$	$\ddot{y}\big\|_{t=\frac{\pi}{6}} = \boxed{0 \quad m/s^2}$

6

مثال :

المعادلة الكارتيزية لحركة جسيم في مستوى هي :

$$y = 2x\sqrt{1 - \frac{x^2}{100}}$$

اذا كانت المركبة الافقية للعجلة معطاه بالعلاقة : $\ddot{x} = -x$

واحوال بداية الحركة هي : $(V_0, \theta_0) = (20, 90^\circ)$ و $(x_0, y_0) = (10, 0)$

عين : أ) المعادلتين البارامتريتين .

ب) سرعة الجسيم عند $t = \frac{\pi}{2}$

* التعويض في المعادلة الكارتيزية .

$$y = 2 * 10\cos(t) * \sqrt{1 - \frac{100\cos^2 t}{100}}$$

$$y = 10 * 2 * \cos(t) * \sin(t)$$

$$\boxed{y = 10\sin 2t}$$

لتعيين السرعة نعين أولاً مركبتي السرعة

$$\dot{x} = -10\sin(t)$$

$$\dot{x}\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -10$$

$$\dot{y} = 10 * 2\cos 2t$$

$$\dot{y}\big|_{t=\frac{\pi}{2}} = -20$$

$$\therefore V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$\ddot{x} = -x$$

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -x$$

$$\int_0^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = -\int_{10}^{x} x\, dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{\cancel{2}} = -\left[\frac{x^2}{\cancel{2}} - \frac{(10)^2}{\cancel{2}}\right]$$

$$\boxed{\dot{x} = \pm\sqrt{100 - x^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{(10)^2 - x^2}$$

$$\int_{10}^{x} \frac{dx}{\sqrt{(10)^2 - x^2}} = \pm\int_0^t dt$$

$$\sin^{-1}\frac{x}{10} - \sin^{-1}\frac{10}{10} = \pm t$$

$$\sin^{-1}\frac{x}{10} = \frac{\pi}{2} \pm t$$

$$\frac{x}{10} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm t\right)$$

(17)

مسألة

المعادلتان البارامتريتان لحركة جسيم في مستوى هما:

$$\ddot{x} = -4x \quad \& \quad \ddot{y} = -4y$$

حيث كلا من x, y بالمتر. اذا بدأ الجسيم حركته من النقطة $(20,0)$ بسرعة ابتدائية $V_0 = 40$ في الاتجاه الموجب لمحور y.

عين المعادلة الكارتيزية لمسار الجسيم وكذلك سرعته وعجلته عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\ddot{y} = -4y$$

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -4y$$

$$\int_{40}^{\dot{y}} \dot{y}\, d\dot{y} = -4\int_{0}^{y} y\, dy$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} - \frac{40^2}{2} = -4\frac{y^2}{2}$$

$$\dot{y}^2 = 40^2 - 4y^2$$

$$\dot{y}^2 = 4\left[20^2 - y^2\right]$$

$$\boxed{\dot{y} = \pm 2\sqrt{20^2 - y^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2\sqrt{20^2 - y^2}$$

$$\int_{0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{20^2 - y^2}} = \pm\int_{0}^{t} 2\, dt$$

$$\sin^{-1}\frac{y}{20} = \pm 2t$$

معنى أن السرعة في اتجاه y

$$\dot{x}_0 = 0 \quad \& \quad \dot{y}_0 = 40$$

$$\ddot{x} = -4x$$

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -4x$$

$$\int_{0}^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = -4\int_{20}^{x} x\, dx$$

$$\frac{\dot{x}^2}{2} = -4\left[\frac{x^2}{2} - \frac{20^2}{2}\right]$$

$$\boxed{\dot{x} = \pm 2\sqrt{20^2 - x^2}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm 2\sqrt{20^2 - x^2}$$

$$\int_{20}^{x} \frac{dx}{\sqrt{20^2 - x^2}} = \pm\int_{0}^{t} 2\, dt$$

$$\sin^{-1}\frac{x}{20} - \sin^{-1}\frac{20}{20} = \pm 2t$$

$$\frac{x}{20} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2t\right)$$

$$\boxed{x = 20\cos 2t}$$

لتعيين المعادلة الكارتيزية نحذف t من المعادلتين

$$\frac{x}{20} = \cos 2t \qquad \frac{y}{20} = \sin 2t$$

بتربيع المعادلتين والجمع

$$\left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{20}\right)^2 = (\sin 2t)^2 + (\cos 2t)^2$$

$$\boxed{\left(\frac{x}{20}\right)^2 + \left(\frac{y}{20}\right)^2 = 1}$$

$$\dot{x} = -20 * \sin 2t * 2 \qquad \dot{y} = 20 * \cos 2t * 2$$

$$\dot{x} = -40 \sin 2t \qquad \dot{y} = 40 * \cos 2t$$

$$\dot{x}\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = -40 * 1 \qquad \dot{y} = 40 * 0 = 0$$

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 40 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{0}{-40} = 180$$

$$\ddot{x} = -40 * \cos 2t * 2 \qquad \ddot{y} = -40 * \sin 2t * 2$$

$$\ddot{x} = -80 * \cos 2t \qquad \ddot{y} = -80 * \sin 2t$$

$$\ddot{x}\big|_{t=\frac{\pi}{4}} = 0 \qquad \ddot{y} = -80$$

$$f = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = +80 \text{ m/s}^2$$

مثال

مركبتا العجلة لحركة جسيم في مستوى هما :

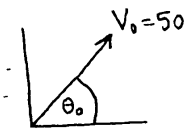
$\ddot{x} = 0 \qquad \ddot{y} = -10$

اذا كانت احوال البداية كالتالي : $(V_0, \theta_0) = (50, \tan^{-1}\frac{3}{4})$ و $(x_0, y_0) = (0,0)$

عين :

أ- المعادلة الكارتيزية لمنحنى مسار الجسيم

ب- اقصى ارتفاع للجسيم (y_{max}) فوق محور x والسرعة عند هذه اللحظة



$\dot{x}_0 = 50\cos\theta = 40$

$\dot{y}_0 = 50\sin\theta = 30$

$x_0 = y_0 = 0$

$\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = const = \dot{x}_0 = 40$

$\frac{dx}{dt} = 40$

$\int_0^x dx = \int_0^t 40\, dt$

$x = 40t$

$\ddot{y} = -10$

$\frac{d\dot{y}}{dt} = -10$

$\int_{30}^{\dot{y}} d\dot{y} = -\int_0^t 10\, dt$

$\dot{y} - 30 = -10t$

$\frac{dy}{dt} = 30 - 10t$

$\int_0^y dy = \int_0^t 30 - 10t\, dt$

$y = 30t - 5t^2$

من المعادلة البارامترية لـ x

$t = \frac{x}{40}$

$\therefore y = \frac{30}{40}x - \frac{5 * x^2}{(40)^2}$ المعادلة الكارتيزية

$y_{max} \Rightarrow \dot{y} = 0$

$\dot{y} = 30 - 10t = 0$

$\therefore \boxed{t = 3}$

$\therefore$ اقصى ارتفاع عند $t = 3$

$\dot{x}|_{t=3} = 40$

$\dot{y}|_{t=3} = 0$

مثال

مركبتا العجلة لحركة جسيم في مستوى هما :

$\ddot{x} = 2$ $\qquad$ $\ddot{y} = 24(t-1)^2$

اذا كانت احوال بداية الحركة $(x_0, y_0) = (1,2)$ و $(\dot{x}_0, \dot{y}_0) = (-2,-8)$

عين :

أ - المعادلة الكارتيزية للمسار .

ب - مركبتا السرعة $\dot{y}$ و $\dot{x}$ عندما $t = 4$.

$$\ddot{y} = 24(t-1)^2$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = 24(t-1)^2$$

$$\int_{-8}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_0^t 24(t-1)^2\, dt$$

$$\dot{y} + 8 = \left[\frac{24}{3}(t-1)^3\right]_0^t$$

$$\dot{y} + 8 = 8(t-1)^3 + 8$$

$$\boxed{\dot{y} = 8(t-1)^3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 8(t-1)^3$$

$$\int_2^y dy = \int_0^t 8(t-1)^3\, dt$$

$$y - 2 = \left[\frac{8}{4}(t-1)^4\right]_0^t$$

$$y - \cancel{2} = 2(t-1)^4 - \cancel{2}$$

$$y = 2(t-1)^4$$

$$\ddot{x} = 2$$

$$\frac{d\dot{x}}{dt} = 2$$

$$\int_{-2}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_0^t 2\, dt$$

$$\dot{x} + 2 = 2t$$

$$\dot{x} = 2t - 2$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t - 2$$

$$\int_1^x dx = \int_0^t 2t - 2\, dt$$

$$x - 1 = t^2 - 2t$$

$$x = t^2 - 2t + 1$$

$$x = (t-1)^2$$

$$\dot{x}|_{t=4} = 2 * 4 - 2 = 6 \text{ m/s}$$

$$\dot{y}|_{t=4} = 8(4-1)^3 = 216 \text{ m/s}$$

(21)

مثال

المعادلتان البارامتريتان للحركة المستوية لجسيم هما

$y = \sin(t-4)$ و $x = 3t^2 + 2t$

أوجد مقدار السرعة V والعجلة f مقداراً واتجاهاً عند $t=3$.

$$x = 3t^2 + 2t$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = 6t + 2$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = 6$$

$$\boxed{\dot{x} = 6 * 3 + 2 = 20}$$

$$\boxed{\ddot{x} = 6}$$

$$y = \sin(t-4)$$

$$\dot{y} = \cos(t-4)$$

$$\ddot{y} = -\sin(t-4)$$

عند $\boxed{t=3}$

$$\dot{y} = \cos(3-4) = \cos(-1)$$

$$\boxed{\dot{y} \simeq 1}$$

$$\ddot{y} = -\sin(3-4)$$

$$\boxed{\ddot{y} \simeq 0}$$

$$\therefore V = \sqrt{(20)^2 + (1)^2} \simeq 20 \quad \text{و} \quad \theta \simeq 2.86$$

$$f = 6 \quad \text{و} \quad \phi = 0$$

#

مسائل منوعة على الحركة في المستوى

مسألة رقم ١ :

المعادلة الكارتيزية لمسار حركة جسيم في مستوى هي :

$$y^2 = 8x$$

حيث كلا من y و x بالمتر . اذا كانت احوال البداية هي :

$\dot{x}_0 = \dot{y}_0 = 0$ و $(x_0, y_0) = (2, 4)$

وكانت المركبة الرأسية للعجلة معطاه بالعلاقة

$$\ddot{y} = -4y$$

عين :

أ - المعادلتان البارامتريتان للمسار .

ب - الفترة الزمنية بين نقطتين سكون متتاليتين على المسار .

$$\ddot{y} = -4y$$

$$\dot{y}\frac{d\dot{y}}{dy} = -4y$$

$$\int_0^{\dot{y}} \dot{y}\, d\dot{y} = \int_4^{y} -4y\, dy$$

$$\frac{\dot{y}^2}{2} = -4\left[\frac{y^2}{2} - \frac{4^2}{2}\right]$$

$$\dot{y}^2 = 4\left[4^2 - y^2\right]$$

$$\boxed{\dot{y} = \pm 2\sqrt{4^2 - y^2}}$$

$$\frac{dy}{dt} = \pm 2\sqrt{4^2 - y^2}$$

$$\int_4^{y} \frac{dy}{\sqrt{4^2 - y^2}} = \pm \int_0^{t} 2\, dt$$

$$\left[\sin^{-1}\frac{y}{4}\right]_4^{y} = \pm 2t$$

$$\sin^{-1}\frac{y}{4} - \sin^{-1}\frac{4}{4} = \pm 2t$$

$$\sin^{-1}\frac{y}{4} - \frac{\pi}{2} = \pm 2t$$

$$\sin^{-1}\frac{y}{4} = \frac{\pi}{2} \pm 2t$$

$$\frac{y}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm 2t\right)$$

$$\boxed{y = 4\cos 2t}$$

(23)

بالتعويض في المعادلة الكارتيزية

$$y^2 = 8x$$
$$16\cos^2 2t = 8x$$
$$\boxed{x = 2\cos^2 2t} \quad (2)$$

$y = 4\cos 2t$

$\dot{y} = -4 * \sin 2t * 2$

$\boxed{\dot{y} = -8\sin 2t}$

$x = 2\cos^2 2t$

$\dot{x} = -2 * 2 * \cos 2t * \sin 2t * 2$

$\boxed{\dot{x} = -4\sin 4t}$

عند ما يكون الجسيم في حالة سكون هذا يعني أن

$\dot{x}_0 = 0$ & $\dot{y}_0 = 0$

$$\sin\phi = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \ldots$$

$$\dot{y} = 0 \Rightarrow \sin 2t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \ldots$$

$$\dot{x} = 0 \Rightarrow \sin 4t = 0 \Rightarrow t = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \ldots$$

$\frac{\pi}{2}$ $\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi}{2}}$$

#

مثال

مركبتا العجلة لحركة جسيم في مستوى هما :

$\ddot{x} = 0$ و $\ddot{y} = -8$

بدأ الجسيم حركته من نقطة الأصل بسرعة $V_0 = 80$ في اتجاه $\alpha = \tan^{-1}\frac{3}{4}$

عين :

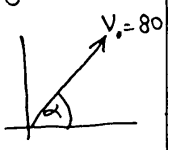
أ - معادلة مسار الجسيم

ب - نقطة تقاطعه مع محور x

جـ - اقصى ارتفاع فوق محور x

د - سرعة الجسيم مقداراً واتجاهاً عندما يكون $y = 160\,m$.

$x_0 = 0 \qquad y_0 = 0$



$\dot{x}_0 = 80\cos\alpha = 64$

$\dot{y}_0 = 80\sin\alpha = 48$

$\ddot{x} = 0$

$\dot{x} = \text{Const} = \dot{x}_0 = 64$

$\frac{dx}{dt} = 64$

$\int_0^x dx = \int_0^t 64\,dt$

$x = 64t$

$\ddot{y} = -8$

$\frac{d\dot{y}}{dt} = -8$

$\int_{48}^{\dot{y}} d\dot{y} = -\int_0^t 8\,dt$

$\dot{y} - 48 = -8t$

$\dot{y} = 48 - 8t$

$\frac{dy}{dt} = 48 - 8t$

$\int_0^y dy = \int_0^t 48 - 8t\,dt$

$y = 48t - 4t^2$

من المعادلة البارامترية لـ x

$t = \frac{x}{64}$

$y = \frac{48}{64}x - \frac{4x^2}{(64)^2}$

* تقاطعه مع محور x عند $y = 0$

$0 = \left(\frac{48}{64} - \frac{4}{(64)^2}x\right)x$

@ $\boxed{x = 0}$ $\qquad$ $\boxed{x = 76.8}$:

* اقصى ارتفاع ⇐ $\dot{y} = 0$

$0 = 48 - 8t$